Γραμμική ΙΙ

Ισομετρίες και ορθογώνιοι Πίνακες

Έστω $(E, <,>)$ και $(F, <,>)$ δύο ευκλείδειοι χώροι.

Ορισμός Μια γραμμική απεικόνιση $f: E \to F$ καλείται ισομετρία $\iff \forall \vec{x} \in E \; \boxed{\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|}$

Πχ ① Αν $(E, <,>)$ είναι Ευκλείδειος χώρος, τότε η ταυτοτική γραμμική απεικόνιση $Id_E : E \to E$, $Id_E(\vec{x}) = \vec{x}$, είναι ισομετρία.

② Έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x,y,0)$, η οποία είναι ισομετρία.

③ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$

$\|(x_1, \ldots, x_n)\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$

$$\|f(x,y)\|^2 = \left\|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right\|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{4}x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}y^2 + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}xy} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}xy} = x^2 + y^2 = \|(x,y)\|^2$$

$\Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|f(x,y)\| = \|(x,y)\|^2 \Rightarrow f :$ ισομετρία

Πρόταση Έστω $f : (E, <,>) \to (F, <,>)$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

① f: ισομετρία

Υπενθύμιση: Αν $(E, <,>)$ είναι ευκλείδειος χώρος και $\vec{x}, \vec{y} \in E$, τότε η απόσταση $\rho(\vec{x}, \vec{y})$ μεταξύ των $\vec{x}, \vec{y}$ ορίζεται να είναι ο αριθμός:

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Άσκηση: Η απόσταση ρ ορίζει μια απεικόνιση $\rho : E \times E \to \mathbb{R}$, όπου $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ και ισχύουν οι ιδιότητες:

i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \rho(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$

ii) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$

iii) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x})$

iv) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E : \rho(\vec{x}, \vec{z}) \leq \rho(\vec{x}, \vec{y}) + \rho(\vec{y}, \vec{z})$

Μια απεικόνιση ρ όπως παραπάνω που ικανοποιεί τις ιδιότητες 1-4 καλείται μετρική επί του συνόλου E και το ζεύγος (E, ρ): μετρικός χώρος.

② Η f διατηρεί αποστάσεις: $\rho(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = \rho(\vec{x}, \vec{y}), \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ ②

③ $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E$

④ $\forall \vec{x} \in E, \|\vec{x}\| = 1 \Rightarrow \|f(\vec{x})\| = 1$

Απόδειξη: ① ⇒ ② | Έστω ότι η f: ισομετρία : $\forall \vec{x} \in E : \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \rho(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|f(\vec{x} - \vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \rho(\vec{x}, \vec{y})$

② ⇒ ① | Έστω ότι η f διατηρεί αποστάσεις. Τότε, $\forall \vec{x} \in E$:

$\|f(\vec{x})\| = \|f(\vec{x}) - \vec{0}\| = \|f(\vec{x}) - f(\vec{0})\| = \rho(f(\vec{x}), f(\vec{0})) = \rho(\vec{x}, \vec{0}) = \|\vec{x} - \vec{0}\| =$
$= \|\vec{x}\|$. Άρα η f είναι ισομετρία.

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E : \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle =$
$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \Rightarrow \boxed{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2}\left[\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2\right]}$ (*)

① ⇒ ③ | Έστω ότι η f: ισομετρία και έστω $\vec{x}, \vec{y} \in E$. Τότε:

$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left[\|f(\vec{x}) + f(\vec{y})\|^2 - \|f(\vec{x})\|^2 - \|f(\vec{y})\|^2\right] =$
$= \frac{1}{2}\left[\|f(\vec{x} + \vec{y})\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2\right]$
$= \frac{1}{2}\left[\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2\right] \overset{(*)}{=} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

③ ⇒ ① | Έστω ότι ισχύει η ③ και τότε $\forall \vec{x} \in E$:

$\|f(\vec{x})\|^2 = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle \overset{(3)}{=} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \|\vec{x}\|^2 \Rightarrow \|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \Rightarrow$
$\Rightarrow f$: ισομετρία.

① ⇒ ④ | Αν η f είναι ισομετρία, τότε $\forall \vec{x} \in E : \|\vec{x}\| = 1$:
$\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| = 1$

④ ⇒ ① | Έστω ότι ισχύει η ④ και έστω $\vec{x} \in E$.

- αν $\vec{x} = \vec{0}$, τότε $\|f(\vec{x})\| = \|f(\vec{0})\| = \|\vec{0}\| = 0 = \|\vec{0}\| = \|\vec{x}\|$

• αν $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε $\|\vec{x}\| \neq 0$. Τότε ορίζεται το μοναδιαίο διάνυσμα (3)

$\vec{x}' = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$. Έτσι $\|\vec{x}'\| = 1$. Τότε $\vec{x} = \|\vec{x}\| \cdot \vec{x}'$ και άρα:

$f(\vec{x}) = f(\|\vec{x}\| \cdot \vec{x}') = \|\vec{x}\| \cdot f(\vec{x}')$

Τότε $\|f(\vec{x})\| = \| \|\vec{x}\| \cdot f(\vec{x}')\| = \|\vec{x}\| \, \underbrace{\|f(\vec{x}')\|}_{1} = \|\vec{x}\|$

Άρα $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$, $\forall \vec{x} \in E \Rightarrow f$: ισομετρία

Παρατήρηση: ① Έστω $f: (E, \langle,\rangle) \to (F, \langle,\rangle)$ μια ισομετρία. Τότε, η f διατηρεί γωνίες μη-μηδενικών διανυσμάτων:

$\cos \measuredangle (f(\vec{x}), f(\vec{y})) = \cos \measuredangle (\vec{x}, \vec{y})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ στον E.

Υπενθύμιση: $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$, $\vec{x} \neq \vec{0} \neq \vec{y}$: $\cos \measuredangle (\vec{x}, \vec{y}) = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$ $\boxed{**}$

Αν $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε $f(\vec{x}) \neq \vec{0}$, διότι αν $f(\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow \|f(\vec{x})\| = \|\vec{0}\| = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ Άτοπο!

Άρα $\cos \measuredangle (f(\vec{x}), f(\vec{y})) \overset{(**)}{=} \dfrac{\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle}{\|f(\vec{x})\| \cdot \|f(\vec{y})\|} = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \cos \measuredangle (\vec{x}, \vec{y})$

② Αν $\vec{x}, \vec{y} \in E$, τότε $\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow f(\vec{x}) \perp f(\vec{y})$. Μια ισομετρία διατηρεί καθετότητα

③ Μια ισομετρία διατηρεί ορθοκανονικότητα. Αν $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$: ορθοκανονικό σύνολο στον E, τότε το $\{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\}$: ορθοκανονικό σύνολο στον F.

Τότε $\forall i,j = 1, \dots, n$: $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i=j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$

και τότε $\forall i,j = 1, \dots, n$: $\langle f(\vec{e}_i), f(\vec{e}_j) \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$

④ Μια ισομετρία στέλνει μια ΟΚΒ του E σε ορθοκανονικό σύνολο στον F.

Ειδικότερα, αν $f: (E, \langle,\rangle) \to (F, \langle,\rangle)$ είναι μια ισομετρία και αν $\dim_{\mathbb{R}} E = \dim_{\mathbb{R}} F = n < \infty$, τότε η f στέλνει ΟΚΒ του E σε ΟΚΒ του F.

Πράγματι: αν $\beta = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ ΟΚΒ του E, τότε όπως παραπάνω, το σύνολο $f(\beta) = \{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n)\}$: ορθοκανονικό σύνολο στον F. Τότε, όπως γνωρίζουμε, το $f(\beta)$: Γ.Α και επειδή $|f(\beta)| = n = \dim_{\mathbb{R}} F$ έπεται ότι

$f(\beta)$: βάση $\Rightarrow$ $f(\beta)$: ΟΚΒ

(5) Κάθε ισομετρία $f:(E,<,>)\to(F,<,>)$ είναι μονομορφισμός

Διότι : αν $\vec{x}\in Ker(f) \Rightarrow f(\vec{x})=\vec{0} \Rightarrow \|f(\vec{x})\| = \|\vec{0}\| = 0 \Rightarrow \|\vec{x}\|=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$. Άρα $Ker(f)=\{\vec{0}\} \Rightarrow f: 1\text{-}1$, δηλ. f: μονομορφισμός.

(6) Κάθε ισομετρία μεταξύ Ευκλείδειων χώρων ίδιας διάστασης είναι ισομορφισμός. Διότι από το (5) η f: μονομορφισμός. Τότε από τη θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων έπεται ότι $\dim_{\mathbb{R}}E=\dim_{\mathbb{R}}Ker(f)+$
$+\dim_{\mathbb{R}}Im(f) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dim_{\mathbb{R}}Im(f)=\dim_{\mathbb{R}}F\\ Im(f)\underset{\text{υπόχωρος}}{\subseteq} F\end{array}\right\} \Rightarrow Im(f)=F \Rightarrow$ f: επιμορφισμός

$\Rightarrow f$: ισομορφισμός.

- Ιδιαίτερα, κάθε ισομετρία $f:(E,<,>)\to(E,<,>)$, όπου $\dim_{\mathbb{R}}E<\infty$ είναι ισομορφισμός.

<u>Ορισμός</u> Δύο Ευκλείδειοι χώροι $(E,<,>)$ και $(F,<,>)$ καλούνται ισομετρικά ισόμορφοι $\Leftrightarrow$ υπάρχει μια ισομετρία $f:(E,<,>)\to(F,<,>)$ η οποία είναι επί (και τότε η f είναι ισομορφισμός).

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $(E,<,>)$ και $(F,<,>)$ δύο Ευκλείδειοι χώροι, πεπερασμένης διάστασης. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) Οι E και F είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

(2) $\dim_{\mathbb{R}}E=\dim_{\mathbb{R}}F$

<u>Απόδειξη</u>: $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Αν οι E και F είναι ισομετρικά ισόμορφα, τότε από τον ορισμό έπεται ότι οι E,F είναι ισόμορφοι και άρα $\dim_{\mathbb{R}}E=\dim_{\mathbb{R}}F$

$\boxed{(2)\Rightarrow(1)}$